

第1讲 二元一次方程组综合应用（练习）

一、同解方程

练习

1. 若方程组 $\begin{cases} x + 2y = 2k - 3 \\ 2x + y = k \end{cases}$ 的解适合 $x + y = 2$ ，则 k 的值为 _____ .

【答案】 3

【解析】 两式相加得，

$$3(x + y) = 3k - 3,$$

由 $x + y = 2$ 得，

$$3k - 3 = 6,$$

解得 $k = 3$.

【标注】 【知识点】 根据解的等量关系解含参的二元一次方程组

2. 方程组 $\begin{cases} 4x - 3y = k \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ 的解 x 与 y 的值相等，则 k 等于 () .

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 根据题意得： $y = x$ ，

$$\text{代入方程组得：} \begin{cases} 4x - 3x = k \\ 2x + 3x = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 1 \\ k = 1 \end{cases}, \text{ 故答案为 B .}$$

【标注】 【知识点】 根据解的等量关系解含参的二元一次方程组

3. 关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} x + 2y = 3m \\ x - y = 9m \end{cases}$ 的解是方程 $3x + 2y = 34$ 的一组解，那么 m 的值是 () .

A. 2

B. -1

C. 1

D. -2

【答案】 A

【解析】
$$\begin{cases} x + 2y = 3m \text{ ①} \\ x - y = 9m \text{ ②} \end{cases}$$

①-②得： $3y = -6m$ ，

解得： $y = -2m$ ，

把 $y = -2m$ 代入②得： $x = 7m$ ，

由题意得： $3 \times 7m - 2 \times 2m = 34$ ，

解得： $m = 2$ ，

故选A.

【标注】【知识点】根据解的等量关系解含参的二元一次方程组

4. 如果方程组 $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 与方程组 $\begin{cases} mx + ny = 8 \\ mx - ny = 4 \end{cases}$ 的解相同，则 $m = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $n = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 3 ; 2

【解析】 根据题意，可先用加减消元法解方程组 $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ，

得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

把 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 代入方程组 $\begin{cases} mx + ny = 8 \\ mx - ny = 4 \end{cases}$ ，

得 $\begin{cases} 2m + n = 8 \\ 2m - n = 4 \end{cases}$ ，

用加减消元法解得 $m = 3$ ， $n = 2$.

故答案为： $m = 3$ ； $n = 2$.

【标注】【知识点】由二元一次方程的解求参数的值

练习

5. 已知方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ ax + by = 12 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ bx + ay = 13 \end{cases}$ 的解相同，则 a 、 b 的值分别是 () .

A. 2 , 3

B. 3 , 2

C. 2 , 4

D. 3 , 4

【答案】 B

【解析】 根据题意，得： $\begin{cases} x + y = 5 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ ，

将 $x = 2$ 、 $y = 3$ 代入 $\begin{cases} ax + by = 12 \\ bx + ay = 13 \end{cases}$ ，

$$\text{得: } \begin{cases} 2a + 3b = 12 \\ 2b + 3a = 13 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore a$ 、 b 的值分别是3、2.

故选: B.

【标注】【知识点】二元一次方程组的同解问题

6. 关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ (n - 8m)x - 8y = 10 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 5x + 6y = -9 \\ 5x + (10m + 2n)y = -9 \end{cases}$ 有相同的解, 求 $m^2 + n^2$ 的值.

【答案】 $m^2 + n^2 = \frac{117}{169}$

【解析】 有题知 $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 5x + by = -9 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$
代入原式有 $\begin{cases} -3(n - 8m) - 8 = 10 \\ -15 + (10m + 2n) = -9 \end{cases}$
解得: $\begin{cases} m = \frac{9}{13} \\ n = -\frac{6}{13} \end{cases}$
则 $m^2 + n^2 = \frac{117}{169}$.

【标注】【知识点】二元一次方程组的同解问题

7. 已知方程组 $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ mx + ny = 7 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2mx - 3ny = 19 \\ 5y - x = 3 \end{cases}$ 有相同的解, 求 m 、 n 的值.

【答案】 $\begin{cases} m = 4 \\ n = -1 \end{cases}$.

【解析】 由题意得 $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5y - x = 3 \end{cases}$,
解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$,
将 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} mx + ny = 7 \\ 2mx - 3ny = 19 \end{cases}$,
得 $\begin{cases} 2m + n = 7 \\ 4m - 3n = 19 \end{cases}$,
解得 $\begin{cases} m = 4 \\ n = -1 \end{cases}$.

【标注】【知识点】二元一次方程组的同解问题

8.

已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ ax + by = 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ ay - bx = 3 \end{cases}$ 的解相同，求 a 、 b 的值。

【答案】 $a = \frac{3}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$.

【解析】 $\because$ 关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \text{①} \\ ax + by = 1 \text{②} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \text{③} \\ ay - bx = 3 \text{④} \end{cases}$ 的解相同，

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \text{①} \\ 3x + 2y = 11 \text{③} \end{cases}$ ，

得： $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ ，

把 $x = 3$ ， $y = 1$ 代入方程组 $\begin{cases} ax + by = 1 \\ ay - bx = 3 \end{cases}$ ，

得： $\begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - 3b = 3 \end{cases}$ ，

解得： $a = \frac{3}{5}$ ， $b = -\frac{4}{5}$.

【标注】【知识点】二元一次方程组的同解问题

二、错解方程

9. 解方程组 $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx - 7y = 8 \end{cases}$ 时，正确的解是 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ ，由于看错了系数 c 得到的解是 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ ，则 $a + b + c$ 的值是（ ）.

A. 5

B. 6

C. 7

D. 无法确定

【答案】 C

【解析】 $\because$ 方程组 $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx - 7y = 8 \end{cases}$ 时，正确的解是 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ ，

由于看错了系数 c 得到的解是 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 把 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ 代入 $ax + by = 2$ 中得：

$\begin{cases} 3a - 2b = 2 \text{①} \\ -2a + 2b = 2 \text{②} \end{cases}$ ，

①+②得： $a = 4$ ，

把 $a = 4$ 代入①得： $b = 5$ ，

把 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ 代入 $cx - 7y = 8$ 中得： $3c + 14 = 8$ ，

解得： $c = -2$ ，

则 $a + b + c = 4 + 5 - 2 = 7$ ，

故选：C．

【标注】【知识点】二元一次方程组的看错系数问题

10. 甲、乙两人共同解方程组 $\begin{cases} ax - y = -1 \text{ ①} \\ 3x - by = 2 \text{ ②} \end{cases}$ ，由于甲看错了方程①中的 a ，得到方程组的解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ，乙看错了方程②中的 b ，得到方程组 $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$ ，则计算 a^7b^4 的值是解为（ ）．
- A. 1 B. -2 C. 2 D. -1

【答案】B

【解析】把 $x = 2, y = 1$ 代入②得 $3 \times 2 - b = 2$ ，

$$b = 4,$$

把 $x = -4, y = 3$ 代入①得 $a = -\frac{1}{2}$ ，

$$\begin{aligned} \therefore a^7b^4 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \times 4^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \times 2^8 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \times 2\right)^7 \times 2 = -2. \end{aligned}$$

故选B．

【标注】【知识点】二元一次方程组的看错系数问题

11. 小飞哥和小仙女同解一个二元一次方程组 $\begin{cases} mx + ny = 16 \text{ (1)} \\ nx + my = 1 \text{ (2)} \end{cases}$ ，小飞哥把方程(1)抄错，解得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ ，小仙女把方程(2)抄错，解得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ ．求原方程组的解是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $-\frac{9}{7}; \frac{26}{7}$

【解析】将 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ 代入(2)得： $-n + 3m = 1$ ，将 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ 代入(1)得： $3m + 2n = 16$ ，

$$\text{联立解得：} \begin{cases} m = 2 \\ n = 5 \end{cases},$$

$$\text{即方程组为} \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = -\frac{9}{7} \\ y = \frac{26}{7} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】二元一次方程组的看错系数问题

12. 请回答下列问题：

- (1) 已知方程组 $\begin{cases} ax + by = -16 \\ cx + 20y = -224 \end{cases}$ 的解应为 $\begin{cases} x = 8 \\ y = -10 \end{cases}$ ，小明解题时把 c 抄错了，因此得到的解为 $\begin{cases} x = 12 \\ y = -13 \end{cases}$ ，则 $a^2 + b^2 + c^2$ 的值为 _____。
- (2) 解关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + y = 8 \\ x - by = 7 \end{cases}$ 时，由于粗心，小明看错了方程中的 a ，得到的解为 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$ ，小红看错了方程组中的 b ，得到解为 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 10 \end{cases}$ ，求方程组正确的解。

【答案】 (1) 34

(2) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ 。

【解析】 (1) 将正确的解代入方程组得到 $\begin{cases} 8a - 10b = -16 \\ 8c - 200 = -224 \end{cases}$ ，化简得到 $\begin{cases} 4a - 5b = -8 \\ c = -3 \end{cases}$ 。

小明解题时把 c 抄错，意味着 a, b 是正确的，即此时错误的解满足方程第一式

$$12a - 13b = -16 \text{ ④}, \text{ ④} - 3 \text{③} \text{ 得 } 2b = 8, \text{ 得到 } \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\text{代入得到 } a^2 + b^2 + c^2 = 9 + 16 + 9 = 34.$$

(2) 小明看错了 a 意味着 b 是正确的，即他的解满足方程第二式，代入得 $-3 - 5b = 7$

；小红看错了 b 意味着 a 是正确的，即她的解满足方程第一式，代入得

$$-a + 10 = 8. \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}, \text{ 代入原方程解得: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

【标注】【知识点】二元一次方程组的看错系数问题

三、二元一次方程组解的情况

13. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 5x + 4y = a \\ bx + 2y = 3 \end{cases}$ 只有一组解，则下列式子可能成立的是 ()。

A. $b - 2 = 0.5$

B. $b + 3 = 5.5$

C. $4b = 12$

D. $b^2 - 3 = 3.25$

【答案】 C

【解析】 方程组只有确定的一组解，

那么得到 $\frac{5}{b} \neq \frac{4}{2}$ (本题的结果跟 a 没有任何关系)，

得到 $b \neq 2.5$ ，

观察四个选项，A、B、D 均是 $b = 2.5$ 时计算出来的结果而 C 不是，

故选 C。

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

14. 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + ay + 1 = 0 \\ bx - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 有无数组解, 则 a, b 的值为 () .

A. $a = 0, b = 0$ B. $a = -2, b = 1$ C. $a = 2, b = -1$ D. $a = 2, b = 1$

【答案】B

【解析】方程组有无数组解于是有 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$,

$$\text{于是 } \frac{1}{b} = \frac{a}{-2} = \frac{1}{1},$$

$$\therefore a = -2, b = 1.$$

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

15. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + 3y = 8 \\ 4x - 6y = b \end{cases}$ 有无穷多组解, 试计算参数 a 和 b 并求解关于 z 的方程 $(a + b)z = a - b$ 的解为 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{7}{9}$

【解析】方程组有无穷多组解,

$$\text{则 } \frac{a}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{8}{b},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -2 \\ b = -16 \end{cases},$$

代入关于 z 的方程, 得 $-18z = 14$,

$$\text{解得 } z = -\frac{7}{9},$$

故答案为: $-\frac{7}{9}$.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

16. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - y = 1 \end{cases}$.

(1) 当 $a \neq 1$ 时, 解这个方程组 .

(2) 若 $a = 1$, 方程组的解的情况怎样?

(3) 若 $a = 1$, 方程组 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - y = 2 \end{cases}$ 的解的情况怎样?

【答案】(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

(2) 方程组有无数多个解.

(3) 原方程组无解.

【解析】(1) 两式相减, 整理得 $(a-1)x = a-1$,

$\because a \neq 1, \therefore x = 1, y = 0$.

$\therefore$ 方程组的解为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

(2) 当 $a = 1$ 时, 方程 $(a-1)x = a-1$ 的解是一切实数, 方程组有无数多个解.

(3) 方程组整理得 $(a-1)x = a-2$, 当 $a = 1$ 时, $0 \neq -1$,

$\therefore$ 原方程组无解.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

17. 当 m 、 n 为何值时, 关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} mx - y = -n \\ (2m-1)x - y = -4 \end{cases}$.

(1) 无解.

(2) 唯一解.

(3) 有无数多解.

【答案】(1) $m = 1, n \neq 4$.

(2) $m \neq 1, n$ 取任意值.

(3) $m = 1, n = 4$.

【解析】(1) $\begin{cases} mx - y = -n \text{ ①} \\ (2m-1)x - y = -4 \text{ ②} \end{cases}$

由②-①, 得: $(m-1)x = n-4$,

当 $m-1 = 0, n-4 \neq 0$, 即 $m = 1, n \neq 4$ 时, 无解.

(2) 当 $m-1 \neq 0$, 即 $m \neq 1, n$ 取任意值, 有唯一解.

(3) 当 $m-1 = 0, n-4 = 0$ 时, 即 $m = 1, n = 4$ 时, 有无数多解.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

四、含参二元一次方程组整数解问题

18. $\begin{cases} ax + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ (a 为正整数), 方程组的正整数解为 $x = \underline{\hspace{1cm}}$, $y = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 2; 2

【解析】 整理方程组得： $(a+2)x = 6$, $x = \frac{6}{a+2}$, 此时 $a+2 = 3$ 或 6 才为正整数 , $a = 1$ 或 4

当 $a = 1$ 时 , $x = 2$, 代入解得 $y = 2$, 方程组的正整数解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$;

当 $a = 4$ 时 , $x = 1$, 代入解得 $y = 0$, 舍弃 .

【标注】 【知识点】 二元一次方程组的含参整数解问题

19. 已知 m 为正整数 , 且关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} mx + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ 有整数解 , 则 m^2 的值为 () .

A. 4

B. 4, 49

C. 1, 4, 49

D. 无法确定

【答案】 A

【解析】 $\begin{cases} mx + 2y = 10(1) \\ 3x - 2y = 0(2) \end{cases}$,

(1) + (2) 得 , $(3+m)x = 10$,

所以 $x = \frac{10}{3+m}$,

将 $x = \frac{10}{3+m}$ 代入 (2) 得 $y = \frac{15}{3+m}$,

当方程组有整数解时 , $3+m$ 是 10 和 15 的公约数 ,

所以 $3+m = \pm 1$ 或 $3+m = \pm 5$,

即 $m = -2$ 或 $m = -4$ 或 $m = 2$ 或 $m = -8$,

又 $\because m$ 是正整数 ,

$\therefore m = 2$,

则 $m^2 = 4$.

故选 A .

【标注】 【知识点】 二元一次方程组的含参整数解问题

20. 已知方程组 $\begin{cases} x - y = 2 \\ mx + y = 6 \end{cases}$, 若方程组有非负整数解 , 那么正整数 m 的值为 _____ .

【答案】 3或1

【标注】 【知识点】 由二元一次方程组的解求参数的值

21. 当正整数 $a =$ _____ 时, 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + (a-1)y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ 的解是整数.

【答案】 1或3

【解析】 $y = \frac{3}{a}$, $a = 1$ 或 3 .

【标注】 【知识点】 二元一次方程组的含参整数解问题

22. 请回答下列问题:

(1) 当方程组 $\begin{cases} 2x + ay = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ 的解是正整数时, 整数 a 的值为 _____.

(2) m 为正整数, 已知二元一次方程组 $\begin{cases} mx + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ 有整数解, 则 $m^2 =$ _____.

【答案】 (1) -3或1

(2) 4

【解析】 (1) 解方程得: $\begin{cases} x = \frac{10}{a+4} \\ y = \frac{5}{a+4} \end{cases}$,

$\therefore a+4 = 1, 2, 5, 10; a+4 = 1, 5,$

$\therefore a = -3$ 或 1 .

(2) 解方程得: $\begin{cases} x = \frac{10}{m+3} \\ y = \frac{15}{m+3} \end{cases}$,

$\therefore m+3 = 5, 10; m+3 = 5, 15$. 得 $m = 2, m^2 = 4$.

【标注】 【知识点】 二元一次方程组的含参整数解问题

23. 关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 6x + my = 26 \end{cases}$ 有正整数解, 则正整数 m 的值是多少?

【答案】 4.

【解析】 $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \text{ ①} \\ 6x + my = 26 \text{ ②} \end{cases}$,

② $\times 2$ -① $\times 3$ 得: $(2m+9)y = 52 - 18 = 34$,

$y = \frac{34}{2m+9}$,

把 $y = \frac{34}{2m+9}$ 代入①得: $x = \frac{3m+39}{2m+9}$,

$\because x, y$ 是正整数 ,

$\therefore 2m + 9 = 1, 2, 17, 34,$

$\therefore m = -4, -3.5, 4, 12.5,$

$\therefore m$ 是正整数 ,

$\therefore m = 4 .$

【标注】【知识点】二元一次方程组的含参整数解问题